Chapitre 23

Relations de comparaison

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :

- le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.
- a est un point de I ou une extrémité (finie ou infinie) de I.
- f et g designent des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On suppose g o-ïsable au voisinage de a (terme non officiel, cf ci-dessous).

Définition 23.1 (Non officiel : fonction "o-ïsable")

Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que g est o-ïsable au voisinage de a si g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a.

Rappel : "$g \neq 0$ sur un voisinage épointé de a" signifie :

- Lorsque $a = +\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g \neq 0$ sur $I \cap]A, +\infty[$.
- Lorsque $a = -\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g \neq 0$ sur $I \cap]-\infty, A[$.
- Lorsque $a \in \mathbb{R}$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g \neq 0$ sur l'ensemble

$$I \cap \Big( ]a-\varepsilon, a[\cup]a, a+\varepsilon[\Big)$$

  Dans ce cas, la fonction g peut toutefois s'annuler en a.

Dire que g est o-ïsable au voisinage de a permet de dire que le quotient $\frac{1}{g(x)}$ a un sens pour toute valeur $x \neq a$ qui est "assez proche de a". Le nom vient du fait qu'une fonction o-ïsable peut être mise à l'intérieur d'un petit-o ou d'un grand-O (cf plus loin).

1 Fonctions dominées, fonctions négligeables

1.1 Fonction négligeable, petit o

Définition 23.2 (Négligeabilité, petit o)

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. On note alors

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \qquad \text{ou} \qquad f = \underset{a}{o}(g)$$

On dira aussi abusivement que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a. Enfin, on peut également dire (mais c'est plus rare) que g est prépondérante devant f.

Exemple 1. On a $\sin x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$ car $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par ailleurs, $\sin x \neq \underset{x\to 0}{o}(x)$ car $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \dots$.

Remarque. Comparer deux fonctions f et g au voisinage de a revient à donner une relation de comparaison entre f et g au voisinage de a (par exemple avec un petit-o).

Méthode (Comparer avec un petit-o)

Pour comparer f et g avec un petit-o, on peut regarder la limite de $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$:

- Si $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$
- Si $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors par quotient $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ d'où $\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Dans ce cas, $g(x) = \underset{x\to a}{o}(f(x))$.

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer x^n, $\ln x$ et e^x au voisinage de $+\infty$ (gauche) et zéro (à droite).
Faire de même pour x^α et x^β avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$.

1. $\left|\frac{x^n}{e^x}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $x^n = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$.
2. $\left|\frac{\ln x}{e^x}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$.
3. $\left|\frac{\ln x}{x^n}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^n)$.
4. $\left|\frac{x^\alpha}{x^\beta}\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dots\dots$ donc $\dots\dots = \underset{x\to+\infty}{o}(\dots\dots)$.

1. $\left|\frac{x^n}{e^x}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots$ donc $\dots\dots = \underset{x\to 0}{o}(\dots\dots)$
2. $\left|\frac{\ln x}{e^x}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots$ donc $\dots\dots = \underset{x\to 0}{o}(\dots\dots)$
3. $\left|\frac{\ln x}{x^n}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots$ donc $\dots\dots = \underset{x\to 0}{o}(\dots\dots)$
4. $\left|\frac{x^\alpha}{x^\beta}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots$ donc $\dots\dots = \underset{x\to 0}{o}(\dots\dots)$.

Remarque. Malgré le signe égal, il faut bien garder à l'esprit que $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ n'exprime pas une égalité mais une limite. Cela signifie que plus x se "rapproche" de a, plus $f(x)$ est "négligeable" devant $g(x)$.

1.2 Définition équivalente de négligeabilité

Définition 23.3 (Définition équivalente du petit-o)

On a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : I\cap V \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in I\cap V \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Comme g est o-ïsable, on peut choisir V de façon à ce que g ne s'annule pas sur V. Alors la fonction ε est tout simplement définie pour tout $x \in I\cap V$ par $\varepsilon(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

En quelque sorte, l'écriture "$\underset{x\to a}{o}(g(x))$" peut être un raccourci pour "$g(x)$ multiplié par une fonction $\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$". Cela prendra tout son sens au chapitre suivant sur les développements limités, mais c'est une bonne idée de le garder à l'esprit dès maintenant.

1.3 Fonction dominée, grand O

Définition 23.4 (Domination, grand O)

On dit que f est <u>dominée</u> par g <u>au voisinage de a</u>, si $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage (épointé) de a. On note alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{=} O(g)$$

Rappel : si $V \subset \mathbb{R}$, on dit que $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur V si : $\quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V \qquad \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq C$

Théorème 23.5

$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \implies f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$. La réciproque est fausse.

Exemple 3. On a $\sin x \underset{x\to+\infty}{=} O(1)$ car $\left|\dfrac{\sin x}{1}\right| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (donc au voisinage de $+\infty$).

Par contre $\sin x \underset{x\to+\infty}{\neq} o(1)$: $\sin x$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Montrer que si f est dérivable, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} O(x-a)$. La réciproque est-elle vraie ?

- Si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}$, alors $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.
  La réciproque est fausse : $\sin x = \underset{x\to+\infty}{O}(1)$ mais la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

- $f = \underset{a}{O}(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.
  $f = \underset{a}{o}(1)$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

- On ne peut pas écrire $\cancel{1 = \underset{x\to+\infty}{O}(\sin x)}$ car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ n'est pas o-ïsable au voisinage de $+\infty$ (en effet, pour tout voisinage $V = [A, +\infty[$ de $+\infty$, il y a des points de V en lesquels cette fonction n'est pas définie).
  Par contre, on peut écrire $\sin x = \underset{x\to0}{O}(x)$: en effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$ donc sur un voisinage épointé en 0.

1.4 Propriétés du grand O et du petit o

Propriété 23.6 (Transitivité de O et o)

Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction o-ïsable au voisinage de a. On a :

$$f = \underset{a}{O}(g) \quad \text{et} \quad g = \underset{a}{O}(h) \quad \Longrightarrow \quad f = \underset{a}{O}(h)$$
$$f = \underset{a}{O}(g) \quad \text{et} \quad g = \underset{a}{o}(h) \quad \Longrightarrow \quad f = \underset{a}{o}(h)$$

Démonstration. Pour la première assertion, si $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{g}{h}$ sont bornées au voisinage de a, alors il en va de même pour $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{g}{h}$. Donc $f = \underset{a}{O}(h)$.

Pour la seconde assertion, si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a et que $\dfrac{g}{h}$ tend vers zéro en a, alors par produit, $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g} \times \dfrac{g}{h}$ tend vers zéro en a. □

Propriété 23.7 (Opérations avec O et o)

Soit $f_1 : I \to \mathbb{K}$ et $f_2 : I \to \mathbb{K}$.

1. Combinaison linéaire : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$f_1 \underset{a}{=} O(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} O(g) \implies \lambda f_1 + \mu f_2 \underset{a}{=} O(g)$$
$$f_1 \underset{a}{=} o(g) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} o(g) \implies \lambda f_1 + \mu f_2 \underset{a}{=} o(g)$$

2. Multiplication par un scalaire dans o ou O : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$f \underset{a}{=} O(g) \iff f \underset{a}{=} O(\lambda g)$$
$$f \underset{a}{=} o(g) \iff f \underset{a}{=} o(\lambda g)$$

3. Produit : soit $g_1 : I \to \mathbb{K}$ et $g_2 : I \to \mathbb{K}$ o-ïsables au voisinage de a.

$$f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} O(g_2) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$$
$$f_1 \underset{a}{=} O(g_1) \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{=} o(g_2) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$$

Démonstration. Pour les o, c'est immédiat par opérations sur les limites. Pour les O, il faut revenir à la définition. Par exemple pour la première assertion :

- si $\dfrac{f_1}{g}$ est bornée sur un voisinage épointé V_1 de a,
- si $\dfrac{f_2}{g}$ est bornée sur un voisinage épointé V_2 de a,
- alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage épointé de a et $\lambda \dfrac{f_1}{g} + \mu \dfrac{f_2}{g} = \dfrac{\lambda f_1 + \mu f_2}{g}$ est bornée sur $V_1 \cap V_2$.

□

Théorème 23.8 (Composition à droite)

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit u une fonction définie au voisinage de t_0, à valeurs dans I.

$$\begin{cases} u(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a \\ f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) \end{cases} \implies f \circ u(t) = \underset{t \to t_0}{o}(g \circ u(t))$$

Et idem lorsque le o est remplacé par un O.

Démonstration. Pour les o, cela découle de la composition des limites : si $u(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a$ et $\dfrac{f}{g}(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors

$$\frac{f}{g}(u(t)) = \frac{f(u(t))}{g(u(t))} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$$

La preuve avec les O est plus technique mais moins importante. □

Exemple 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x^n \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$. Si u est une fonction telle que $u(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$, alors on a

$$u(t)^n \underset{t \to t_0}{=} o\left(e^{u(t)}\right)$$

Par exemple :

- Avec $t_0 = +\infty$ et $u(t) = \ln t$, on en déduit que $(\ln t)^n \underset{t \to +\infty}{=} o(t)$.
- Avec $t_0 = 0$ et $u(t) = \dfrac{1}{|t|}$, on en déduit que $\dfrac{1}{|t|^n} \underset{t \to 0}{=} o\, e^{\frac{1}{|t|}}$.
- Avec $t_0 = +\infty$ et $u(t) = e^t$, on en déduit que $e^{nt} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{e^t}\right)$.

ATTENTION : ***NE JAMAIS COMPOSER A GAUCHE AVEC LES GRAND-O ET PETIT-o !***

En d'autres termes : $f \underset{a}{=} o(g) \not\Longrightarrow h \circ f \underset{a}{=} o(h \circ g)$ et idem pour les O. Contre-exemple :

$$x \underset{x \to 0}{=} o(1) \qquad \text{mais} \qquad e^x \underset{x \to 0}{\neq} o(e^1) \qquad \text{car} \qquad \frac{e^x}{e^1} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{e}$$

Théorème 23.9 (Reformulation des croissances comparées)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^\beta\right) \qquad \text{et} \qquad |\ln x|^\alpha \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

$$x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right) \qquad \text{et} \qquad e^{\beta x} \underset{x \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

2 Fonctions équivalentes

Hypothèse

On rappelle que g est o-ïsable au voisinage de a. Dans cette section, on suppose que f est également o-ïsable au voisinage de a.

2.1 Définition

Définition 23.10

On dit que f est <u>équivalente</u> à g <u>au voisinage de a</u> si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$. On note alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad \text{ou} \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

On dit aussi que g est un <u>équivalent</u> de f <u>au voisinage de a</u>.

On voit que pour que cette définition soit vérifiée, il faut au minimum que f soit o-ïsable au voisinage de a. En effet, si f n'est pas o-ïsable au voisinage de a, il existerait une suite (u_n) de points de I tel que $u_n \to a$ et $f(u_n) = 0$.

Alors on aurait $\dfrac{f(u_n)}{g(u_n)} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais on aurait aussi :

$$\begin{cases} u_n \to a \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \end{cases} \implies \frac{f(u_n)}{g(u_n)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \qquad \text{par composition}$$

ce qui serait une contradiction.

Exemple 6.

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $3x^2 - 2x + 4 \underset{x\to+\infty}{\sim}$ car (si $x \neq 0$)
- $3x^2 - 2x + 4 \underset{x\to 0}{\sim}$ car (si $x \neq 0$)
- $3x^2 - 2x \underset{x\to 0}{\sim}$ car (si $x \neq 0$)

Remarque.

- On ne doit **jamais** écrire “0” dans un équivalent : $\cancel{f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0}$. En effet $x \mapsto 0$ n’est pas o-ïsable au voisinage de tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Pour tout $\ell \in \mathbb{K}$ **non nul**, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$

Propriété 23.11 (Équivalents d’un polynôme)

Soit $f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction polynômiale non nulle : on pose $f_P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \in \mathbb{K}^*$ et $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Alors

$$f_P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad f_P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$$

où $a_d x^d$ est le monôme **non nul** de plus petit degré de P.

Propriété 23.12 (Relation d’équivalence)

$\sim$ est une relation d’équivalence sur les fonctions o-ïsables au voisinage de a : si f, g, h sont trois telles fonctions, on a :

1. Réflexivité : $f \underset{a}{\sim} f$
2. Symétrie : si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$
3. Transitivité : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration. Évident par opérations sur les limites. □

2.2 Opérations et équivalents

Propriété 23.13 (Opérations avec les équivalents)

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ o-ïsables au voisinage de a. On suppose que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$.

1. Multiplication par un scalaire non nul : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda f_1 \underset{a}{\sim} \lambda g_1$
2. Produit : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. Quotient : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. Puissance entière : pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f_1^p \underset{a}{\sim} g_1^p$
5. Puissance réelle : si f_1, g_1 sont strictement positives sur un voisinage épointé de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_1^\alpha \underset{a}{\sim} g_1^\alpha$

Démonstration. Par opérations sur les limites. □

ATTENTION : ***NE JAMAIS ADDITIONNER DES ÉQUIVALENTS*** (ou les soustraire) :

$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \qquad \text{et} \qquad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \;\not\Longrightarrow\; f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$$

Exemple 7. Contre-exemple :

Propriété 23.14 (Ajouter / Retirer un terme dans un équivalent)

Si $f + g$ est o-ïsable au voisinage de a,

$$f + g \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} o(g)$$

ou de manière équivalente, en posant $h = f + g$:

$$h \underset{a}{\sim} g \iff h - g \underset{a}{=} o(g)$$

Démonstration. Il suffit de montrer la deuxième équivalence. On procède par équivalences successives :

$$h \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x \to a} \left(\frac{h(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \iff \lim_{x \to a} \left(\frac{h(x) - g(x)}{g(x)} \right) = 0 \iff h - g \underset{a}{=} o(g)$$

□

En particulier, si $f \underset{a}{=} o(g)$, on peut ajouter ou retirer f dans un équivalent où intervient g :

$$g \underset{a}{\sim} h \iff f + g \underset{a}{\sim} h$$

En effet, par la Proposition ci-dessus, $f + g \underset{a}{\sim} g$, et on montre les deux implications par la transitivité de $\underset{a}{\sim}$.

Méthode (Équivalent d'une somme)

Étant donné deux fonctions f, g, pour trouver un équivalent de $f+g$ en a, la première chose à tenter est de vérifier si l'une des fonctions est négligeable devant l'autre, i.e. si $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $g \underset{a}{=} o(f)$.

Si par exemple $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f+g \underset{a}{\sim} g$ et la somme a disparu.

Exemple 8. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2 + x}{x(e^x - x)}$.

En $+\infty$:

- $(\ln x)^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim}$
- $e^x - x \underset{x\to+\infty}{\sim}$ donc $x(e^x - x) \underset{x\to+\infty}{\sim}$

Donc

$$\frac{(\ln x)^2 + x}{x(e^x - x)} \underset{x\to+\infty}{\sim}$$

En 0 :

- $(\ln x)^2 + x \underset{x\to 0}{\sim}$
- $e^x - x \underset{x\to 0}{\sim}$ donc $x(e^x - x) \underset{x\to 0}{\sim}$

Donc

$$\frac{(\ln x)^2 + x}{x(e^x - x)} \underset{x\to 0}{\sim}$$

Propriété 23.15 (Composition à droite dans un équivalent)

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit u une fonction définie au voisinage de t_0, à valeurs dans I.

$$\begin{cases} u(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} a \\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \end{cases} \implies f \circ u(t) \underset{t\to t_0}{\sim} g \circ u(t)$$

Par exemple, comme $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, on peut en déduire que :

- $\sin(2t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t$ (on compose à droite par $u(t) = 2t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$).
- $\sin(-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$ (on compose à droite par $u(t) = -t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$).
- $\sin(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ (on compose à droite par $u(t) = t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$).

ATTENTION : ***NE JAMAIS COMPOSER A GAUCHE DANS LES ÉQUIVALENTS !***

$$x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1 \quad \text{mais} \quad e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$$

2.3 Les équivalents à connaitre

Propriété 23.16

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

Démonstration. Pour tout $x \neq a$, comme f est dérivable en a,

$$\frac{f(x) - f(a)}{f'(a)(x-a)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)}{f'(a)} = 1$$

d'où le résultat. $\square$

Corollaire 23.17 (Équivalents en 0 à connaitre)

$$\begin{array}{lrclrcl}
 & e^x - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & x & \sin x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
 & \ln(1+x) & \underset{x \to 0}{\sim} & x & \tan x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}^* & (1+x)^\alpha - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & \alpha x & \arcsin x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
 & \operatorname{sh} x & \underset{x \to 0}{\sim} & x & \arctan x & \underset{x \to 0}{\sim} & x \\
 & \operatorname{ch} x - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & \dfrac{x^2}{2} & \cos x - 1 & \underset{x \to 0}{\sim} & -\dfrac{x^2}{2}
\end{array}$$

Démonstration. Les formules des quatre premières lignes découlent directement de la Proposition 23.16. Pour la dernière ligne, on ne peut pas l'appliquer car $\cos'(0) = 0$ et $\operatorname{ch}'(0) = 0$, ce qui donnerait 0 à droite de l'équivalent. On réécrit alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} -2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2}$$

L'équivalent en 0 ci-dessus vient du fait que $\sin x \sim x$ donc par composition à droite $\sin \frac{x}{2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. Ensuite, on met l'équivalent au carré : $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \left(\frac{x}{2}\right)^2$ et enfin on le multiplie par -2. Finalement, $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. $\square$

Exemple 9. Déterminer la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin x}$.

2.4 Autres propriétés des équivalents

Propriété 23.18 (Conservation du signe et des limites par les équivalents)

On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$.

- Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
- On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $g > 0$ au voisinage de a, alors $f > 0$ au voisinage de a.
- On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $g < 0$ au voisinage de a, alors $f < 0$ au voisinage de a.

Théorème 23.19 (Théorème d'encadrement)

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a.
Si $f \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} g \underset{a}{\sim} h$.

3 Relations de comparaison pour les suites

Les relations de comparaison vues pour les fonctions peuvent être adaptées aux suites. Pour les fonctions, on les définit au voisinage d'un point a (fini ou infini). Pour les suites, qui sont définies sur $\mathbb{N}$, toutes les relations sont définies en $+\infty$. L'hypothèse "g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a" devient alors "(v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang".

Hypothèse

Dans toute cette section, on suppose que (u_n) et (v_n) sont des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. De plus on suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Définition 23.20

1. On dit que (u_n) est <u>négligeable</u> devant (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$.
2. On dit que (u_n) est <u>dominée</u> par (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.
3. On dit que (u_n) est <u>équivalente</u> à (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

À nouveau, on s'autorise à écrire abusivement que le terme général u_n est négligeable / dominé / équivalent au terme général v_n. Enfin, pour le premier point, on trouve également la formule "v_n est <u>prépondérante</u> devant u_n".

Exemple 10. Pour chacun des cas ci-dessous, comparer u_n et v_n.

1. $u_n = n^2 - n - 1 \quad \text{et} \quad v_n = n^2$
2. $u_n = n^2 - n - 1 \quad \text{et} \quad v_n = 2n^2$
3. $u_n = n^2 \quad \text{et} \quad v_n = 2^n$

La plupart des propriétés vues pour les fonctions s'adaptent aux suites. Plutôt que de tout réécrire, on donne les propriétés conservées avec quelques exemples. Lorsqu'une suite apparait dans un O, dans un o, ou d'un côté d'un $\sim$, on suppose qu'elle est non nulle à partir d'un certain rang.

- Les O et o sont transitifs (Proposition 23.6). Par exemple :
  - si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.
- On peut faire des combinaisons linéaires, des produits, etc. avec des O et des o (Proposition 23.7). Par exemple :
  - si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$
- La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites non nulles à partir d'un certain rang.
- On peut faire le produit, le quotient, mettre à la puissance (sous réserve de sens) un équivalent avec des suites (Proposition 23.13). Par exemple :
  - Si $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$, alors $a_n u_n \sim b_n v_n$ et $\dfrac{a_n}{u_n} \sim \dfrac{b_n}{v_n}$.
  - Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$.
  - Si $u_n \sim v_n$ et que (u_n) et (v_n) sont strictement positives à partir d'un certain rang, alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.
- On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents. Mais on peut enlever un terme négligeable par rapport à l'autre (Proposition 23.14).
  - $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n + v_n \sim v_n$.
  - $a_n \sim b_n$ si et seulement si $a_n = b_n + o(b_n)$.
- On conserve la limite et le signe dans un équivalent (Proposition 23.18).
- On dispose de croissances comparées "version suites". Par exemple :
  - $n^2 = \underset{x \to +\infty}{o}(e^n)$
- On dispose d'un théorème d'encadrement (Proposition 23.19).
  - Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que $u_n \sim w_n$, alors (v_n) est équivalente à u_n et w_n.

La composition à droite pourrait être adaptée, mais ce n'est guère utile. Par contre, on peut partir d'un équivalent de fonctions et composer à droite par une suite :

Théorème 23.21

On suppose que f, g ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de a. On a

$$\begin{cases} \lim u_n = a \\ f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \end{cases} \implies f(u_n) \sim g(u_n)$$

Exemple 11. Déterminer un équivalent de $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Exemple 12. Déterminer un équivalent de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.